



Instituto de Educación Secundaria  
Alfonso X el Sabio  
www.iax.es



Región de Murcia  
Consejería de Educación,  
Juventud y Deportes

# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

## CUADERNILLO DE PENDIENTES

### MATEMÁTICAS I

### 1º BACHILLERATO DE CIENCIAS

	PRUEBA 1: 15 al 17 de Enero	PRUEBA 2: 8 al 10 de Abril	PRUEBA GLOBAL: 27 al 29 de Mayo
<b>Matemáticas I</b>	1) Números reales y Álgebra 2) Trigonometría 3) Números complejos 4) Vectores	5) Geometría analítica 6) Funciones elementales 7) Límites y continuidad 8) Derivadas y aplicaciones	Toda la materia

### RECOMENDACIONES

- ❖ **Para repasar la materia puedes realizar los ejercicios propuestos.**
- ❖ Para preparar la **primera prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 1 hasta la actividad 8.
- ❖ Para preparar la **segunda prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 9 hasta la actividad 15.
- ❖ **Cuantos más ejercicios hagas mejor preparado irás al examen.**

# PRIMERA PRUEBA:

## ACTIVIDAD 1. RADICALES

1.- Reducir a índice común los siguientes radicales:

a)  $\sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{7}$     b)  $\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[3]{a^4}$     c)  $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{ab}$   
 Sol: a)  $\sqrt[12]{4^3 \cdot 5^6 \cdot 7^3}$     b)  $\sqrt[12]{a^9 \cdot a^4 \cdot a^8}$     c)  $\sqrt[12]{b^6 \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot a^3}$

2.- Extraer factores de los siguientes radicales:

a)  $\sqrt{8}$     b)  $\sqrt[3]{16}$     c)  $\sqrt{\frac{27}{4}}$     d)  $4\sqrt{8b^3a^7}$   
 e)  $\sqrt[3]{\frac{729}{512}}$     f)  $\sqrt[3]{-125}$     g)  $\sqrt[3]{\frac{b^6}{216}}$     h)  $\sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}}$   
 i)  $\sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}}$     j)  $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$     k)  $\sqrt{4x^6y^{12}}$     l)  $\sqrt[4]{14641}$

Sol: a)  $2\sqrt{2}$ ; b)  $2\sqrt[3]{2}$ ; c)  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ; d)  $8a^3 \cdot b\sqrt{2ab}$ ; e)  $\frac{9}{8}$ ; f)  $-5$ ; g)  $\frac{b^2}{6}$ ;  
 h)  $\frac{-1}{3b^2}$ ; i)  $\frac{-2}{b^2}$ ; j)  $\frac{6}{7}$ ; k)  $2x^3y^6$ ; l) 11

3.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

a)  $2x\sqrt{x}$     b)  $3\sqrt[3]{3}$     c)  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$     d)  $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$   
 e)  $\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy}$     f)  $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$     g)  $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$     h)  $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}}$

Sol: a)  $\sqrt{4x^3}$ ; b)  $\sqrt[3]{3^4}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ ; d)  $\sqrt{\frac{x}{96}}$ ; e)  $\sqrt{4x^3y}$ ; f)  $\sqrt{3m^3x^5}$ ; g)  $\sqrt[3]{\frac{a^4}{6}}$ ; h)  $\sqrt{\frac{14}{3}}$

4.- Simplifica:

a)  $\sqrt[3]{81b^7}$     b)  $\sqrt[5]{128m^{10}}$     c)  $\sqrt[7]{256b^{14}c^{11}}$   
 d)  $\sqrt[4]{b^7m^3}$     e)  $\sqrt{2,7b^3}$     f)  $\sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}}$

c)  $\sqrt{8}(\sqrt{2} - 5\sqrt{6} + \sqrt{18})$     d)  $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(7\sqrt{3} - 2)$

e)  $\sqrt{\sqrt{13} + 3}\sqrt{\sqrt{13} - 3}$     f)  $(9\sqrt{5} - 7)(9\sqrt{5} + 7)$

Sol: a)  $7+5\sqrt{7}$     b) 2    c)  $16-20\sqrt{3}$     d)  $42-4\sqrt{3}+35\sqrt{6}-10\sqrt{2}$     e) 2    f) 356

10.- Calcular las siguientes sumas:

a)  $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27} - \sqrt{12}$     b)  $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{64}$

c)  $5\sqrt[3]{8} - 3(\sqrt{4} + \sqrt[10]{32}) - 8\sqrt[3]{16} + \frac{1}{\sqrt{8}}$

Sol: a)  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$     b)  $\frac{11}{2}\sqrt{2}$     c)  $-\frac{1}{4}(23\sqrt{2} - 24)$

11.- Realiza las siguientes sumas:

a)  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$     b)  $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

c)  $6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$     d)  $2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{5}$

e)  $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$     f)  $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$

g)  $4\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{300} - \sqrt{108}$     h)  $\sqrt{75a^3b^2} + \sqrt{3ab^4}$

Sol: a)  $5\sqrt{2}$ ; b) 0; c)  $3\sqrt{2}$ ; d)  $14\sqrt{5}$ ; e)  $8\sqrt{2}$ ; f)  $6\sqrt{6}$ ; g)  $47\sqrt{3}$ ; h)  $(5ab + b^2)\sqrt{3a}$

12.- Opera:

a)  $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125}$     b)  $\frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98}$

c)  $\frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45}$     d)  $\frac{4}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48}$

e)  $5\sqrt{44} - 3\sqrt{275} + 6\sqrt{396} - \sqrt{1331}$     f)  $7\sqrt{28} - 4\sqrt{63} + 5\sqrt{343} - 2\sqrt{7}$

Sol: a)  $5\sqrt{5}$ ; b)  $75\sqrt{2}$ ; c)  $\frac{97}{5}\sqrt{5}$ ; d)  $-2\sqrt{3}$ ; e)  $20\sqrt{11}$ ; f)  $35\sqrt{7}$

## ACTIVIDAD 2. LOGARITMOS

1.- Calcular:

a) $\log_2 8$	f) $\log_2 0,25$	k) $\log_4 64 + \log_8 64$	o) $\log 3 / \log 81$
b) $\log_3 9$	g) $\log_{0,5} 16$	l) $\log 0,1 - \log 0,01$	p) $\log_2 3 \times \log_3 4$
c) $\log_4 2$	h) $\log_{0,1} 100$	m) $\log 5 + \log 20$	q) $\log_9 25 \div \log_3 5$
d) $\log_{27} 3$	i) $\log_3 27 + \log_3 1$	n) $\log 2 - \log 0,2$	r) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$
e) $\log_5 0,2$	j) $\log_5 25 - \log_5 5$	ñ) $\log 32 / \log 2$	s) $\log_{\sqrt{2}} 2$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0,5; d) 1/3; e) -1; f) -2; g) -4; h) -2; i) 3; j) 1; k) 5; l) 1; m) 2; n) 1; ñ) 5; o) 0,25; p) 2; q) 1; r) 2/3; s) 2

2.- Determinar el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_3 81 = x$	g) $\log_x 25 = -2$	m) $\log_4 64 = (2x - 1) / 3$
b) $\log_5 0,2 = x$	h) $\log_{2x+3} 81 = 2$	n) $\log_6 [4(x - 1)] = 2$
c) $\log_2 16 = x^3 / 2$	i) $x + 2 = 10^{\log 5}$	ñ) $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$
d) $\log_2 x = -3$	j) $x = 10^{4 \log 2}$	o) $x = \log 625 / \log 125$
e) $\log_7 x = 3$	k) $x = \log 8 / \log 2$	p) $\log(x + 1) / \log(x - 1) = 2$
f) $\log_x 125 = 3$	l) $\log_{9/16} x = 3/2$	q) $\log(x - 7) / \log(x - 1) = 0,5$

Sol: a) 4; b) -1; c) 2; d) 1/8; e) 343; f) 5; g) 1/5; h) 3; i) 3; j) 16; k) 3; l) 27/64; m) 5; n) 10; ñ) 3; o) 4/3; p) 3; q) 10

**ACTIVIDAD 3. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES**

9.- Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

- a)  $\log 4x = 3 \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 3$
- b)  $\log (2x-4) = 2$
- c)  $2 \cdot \log (3-x) = -1$
- d)  $\log (x+1) + \log x = \log (x+9)$
- e)  $\log (x+3) = \log 2 - \log (x+2)$
- f)  $\log (x^2 + 15) = \log (x+3) + \log x$
- g)  $\frac{\log(7+x^2)}{\log(x-4)} = 2$
- h)  $2 \cdot \log (3x-4) = \log 100 + \log (2x+1)^2$
- i)  $\log_2 (x^2 - 1) - \log_2 (x+1) = 2$
- j)  $\log^2 x - 3 \log x = -2$
- k)  $2 \cdot \log (x+5) = \log (x+7)$
- l)  $\log \sqrt{x-1} = \log(x+1) - \log \sqrt{x+4}$

Sol: a) 162; b) 52; c) No; d) ±3; e) 4 y 1; f) 5; g) 9/8; h) -14/17 y -6/23; i) 5; j) 10 y 100; k) -3; l) 5

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

- a)  $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$
- b)  $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$
- c)  $\log_3\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = 2$
- d)  $e^x - 6e^{-x} = 1$
- e)  $\log 2 + \log(11-x^2) = 2 \log(5-x)$
- f)  $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$
- g)  $3^x - 3^{1-x} = 2$
- h)  $2^{2x} - 2^x = 12$
- i)  $3 \log x - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$
- j)  $\log(5 \log 100) = x$
- k)  $3^{2x+1} - 5 = 11$
- l)  $7^{3x-2} = 1$

Sol: a)  $x=7$  b)  $x=-1 - \frac{\log 3}{\log 2}$  c)  $x = \frac{10}{17}$  d)  $x = \ln 3$  e)  $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$  f)  $x=2$  g)  $x=1$  h)  $x=2$  i)  $x=6$  j)  $x=2$  k)  $x = \frac{2 \log 2}{\log 3} - \frac{1}{2}$  l)  $x = \frac{2}{3}$

**ACTIVIDAD 4. SISTEMAS LINEALES (MÉTODO DE GAUSS)**

- 1)  $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$  S.C.D (1,-2,3)
- 2)  $\begin{cases} 3x-4y+2z=1 \\ -2x-3y+z=2 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$  S.I.
- 13)  $\begin{cases} x+y-3z+w=0 \\ x-y+z+w=2 \\ x+2y-5z-w=-3 \\ x-2y+3z-9w=-7 \end{cases}$  S.C.I. (λ, 2-λ, λ, 1)
- 14)  $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$
- 25)  $\begin{cases} -x-3y+2z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ -3x+y+6z=2 \end{cases}$  S.C.D. (5,-1,3)
- 26)  $\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ -x+5y-z=0 \\ x+8y+2z=0 \end{cases}$  S.C.I. (18λ,-λ,13λ)
- 37)  $\begin{cases} 2x-2y-z=7 \\ 4x-4y+2z=17 \\ 3x+2y-6z=-2 \end{cases}$  S.C.D. (41/20,-73/40,3/4)
- 38)  $\begin{cases} x+y+z=515 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{cases}$  S.C.D. (160, 180, 175)

**ACTIVIDAD 5. SISTEMAS NO LINEALES**

- 1.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ x + y = 24 \end{cases}$  (13,11); (11,13)
- 2.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$  (0,3); (12/5,-9/5)
- 3.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y + 3 = 3x \end{cases}$  (2,3); (-1/5,-18/5)
- 4.  $\begin{cases} x-2y^2=0 \\ y+5=3x \end{cases}$  (2,1); (25/18,-5/6)
- 5.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$  (3,4); (-3,-4)
- 6.  $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$  (2,3); (11/2,-1/2)
- 7.  $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x+y) \\ y - x = 1 \end{cases}$  (2,3); (-1/3, 2/3)
- 8.  $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$  (2,3); (3,2)
- 9.  $\begin{cases} y = 1 + 2x \\ x^2 + y^2 + 6x = 16 \end{cases}$  (1,3); (-3,-5)
- 10.  $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{-1}{2} \end{cases}$  (2,1); (1,2/3)
- 11.  $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$  (2,4); (4,2)
- 12.  $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$  (3,3)
- 13.  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$  (9,8)
- 14.  $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$  (1,2); (2,1)
- 15.  $\begin{cases} 4xy - 6y = 3 \\ 3x - 8y = 5 \end{cases}$  (3/2); (1/6,-9/16)
- 16.  $\begin{cases} 3xy - 4y^2 = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$  (1/3,0); (2/3,1/2)

**ACTIVIDAD 6. TRIGONOMETRÍA**

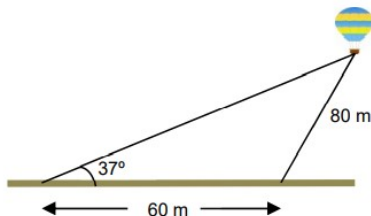
60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con \* se indica el caso dudoso):

- a)  $a=6$  m,  $B=45^\circ$ ,  $C=105^\circ$  (Soluc:  $A=30^\circ$ ,  $b\approx 8,49$  m,  $c\approx 11,59$  m,  $S_{ABC}\approx 24,60$  m<sup>2</sup>)  
 b)  $a=10$  dam,  $b=7$  dam,  $C=30^\circ$  (Soluc:  $c\approx 5,27$  dam,  $B\approx 41^\circ 38'$ ,  $A\approx 108^\circ 22'$ )  
 c)  $b=35,42$  dm,  $A=49^\circ 38'$ ,  $B=70^\circ 21'$  (Soluc:  $C=60^\circ 1'$ ,  $a\approx 28,66$  dm,  $c\approx 32,58$  dm,  $S_{ABC}\approx 439,94$  dm<sup>2</sup>)  
 d)  $a=13$  m,  $b=14$  m,  $c=15$  m (Soluc:  $A\approx 53^\circ 7' 48''$ ,  $B\approx 59^\circ 29' 23''$ ,  $C\approx 67^\circ 22' 48''$ ,  $S_{ABC}\approx 84$ m<sup>2</sup>)

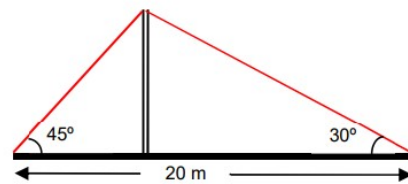
**Problemas de planteamiento:**

67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser  $30^\circ$ . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora  $45^\circ$ . Calcular la altura de la montaña.  
(Soluc:  $\approx 136,60$  m)
68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de  $20^\circ$  y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de  $120^\circ$ . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc:  $\approx 53,21$  m)
69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de  $120^\circ$ . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc:  $\approx 13$  km 77 m)

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?  
(Sol: cable=25 m; mástil=7,32 m)



71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de  $37^\circ$ . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol:  $\approx 71,80$  m y 119.31 m. respectivamente)

**Ecuaciones trigonométricas:**

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=60^\circ+k\cdot 360^\circ$ ; $x=120^\circ+k\cdot 360^\circ$ )   | f) $\sin x = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$ )   |
| b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sol: $x=135^\circ+k\cdot 360^\circ$ ; $x=225^\circ+k\cdot 360^\circ$ ) | g) $\cos x = -1$ (Sol: $x=(2k+1)\cdot 180^\circ$ )   |
|   | h) $\operatorname{cosec} x = -2$ (Sol: $x=210^\circ+k\cdot 360^\circ$ ; $x=330^\circ+k\cdot 360^\circ$ ) |

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 360^\circ$ )  | o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k\cdot 180^\circ$ ; $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$ )                               |
| b) $\sin x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (Sol: $30^\circ$ , $150^\circ$ , $\approx 311^\circ 24' 35''$ y $\approx 228^\circ 35' 25''$ ) | p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k\cdot 360^\circ$ ; $x=150^\circ+k\cdot 360^\circ$ )                            |
| c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k\cdot 180^\circ$ )   | q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k\cdot 180^\circ$ ; $x=45^\circ+k\cdot 90^\circ$ )                          |
|  | r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=36^\circ 52' 11,6''+k\cdot 180^\circ$ ; $x=135^\circ+k\cdot 180^\circ$ ) |

## ACTIVIDAD 7. NÚMEROS COMPLEJOS

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso dar el resultado en forma binómica:

<p>a) <math>(1+i)^2</math> (Soluc: <math>2i</math>)</p> <p>b) <math>(2-2i)^2</math> (Soluc: <math>-8i</math>)</p> <p>c) <math>(1+i)^3</math> (Soluc: <math>-2+2i</math>)</p> <p>d) <math>(2+3i)^3</math> (Soluc: <math>-46+9i</math>)</p> <p>e) <math>(1-i)^4</math> (Soluc: <math>-4</math>)</p> <p>f) <math>(-2+i)^5</math> (Soluc: <math>38+41i</math>)</p> <p>g) <math>\frac{(1+i)^2}{4+i}</math> (Soluc: <math>\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i</math>)</p> <p>h) <math>\frac{2+i}{(1+i)^2}</math> (Soluc: <math>\frac{1}{2} - i</math>)</p> <p>i) <math>(i^4 + i^{-13})^3</math> (Soluc: <math>-2-2i</math>)</p> <p>j) <math>(1+i)^{20}</math> (Soluc: <math>-1024</math>)</p>	<p>k) <math>(-2+2\sqrt{3}i)^6</math> (Soluc: <math>4096</math>)</p> <p>l) <math>\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}</math> (Soluc: <math>-1</math>)</p> <p>m) <math>(4 - 4\sqrt{3}i)^3</math> (Soluc: <math>-512</math>)</p> <p>n) <math>(-2+2\sqrt{3}i)^4</math> (Soluc: <math>-128+128\sqrt{3}i</math>)</p> <p>o) <math>(\sqrt{3}-i)^5</math> (Soluc: <math>-16\sqrt{3}-16i</math>)</p> <p>p) <math>\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}\right)^3</math> (Soluc: <math>27i</math>)</p> <p>q) <math>(-1+i)^{30}</math> (Soluc: <math>2^{15}i</math>)</p> <p>r) <math>\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}</math> (Soluc: <math>-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}</math>)</p>
--	--

54. Dados los complejos  $z_1 = \sqrt{3} - i$ ,  $z_2 = 3i$  y  $z_3 = 1+i$ , calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a)  $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$     b)  $z_1 \cdot z_3$     c)  $(z_1)^4$     d)  $\overline{z_2}$     (Sol: a)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$ ; b)  $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$ ; c)  $-8 + 8\sqrt{3}i$ ; d)  $-3i$ )

55. Dado el complejo  $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ , calcular  $z^5 \cdot \overline{z}$  (Soluc:  $-64$ )

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con (\*)), y representarlas en el plano complejo:

a)  $\sqrt[4]{1+i}$  (Soluc:  $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ}$ ;  $\sqrt[8]{2}_{101,25^\circ}$ ;  $\sqrt[8]{2}_{191,25^\circ}$ ;  $\sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$ )

b)  $\sqrt[3]{1-i}$  (Soluc:  $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$ ;  $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$ ;  $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$ )

(\*) c)  $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$  (Soluc:  $\sqrt[4]{2}_{60^\circ}$ ;  $\sqrt[4]{2}_{150^\circ}$ ;  $\sqrt[4]{2}_{240^\circ}$ ;  $\sqrt[4]{2}_{330^\circ}$ )

d)  $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$  (Soluc:  $\sqrt[6]{2}_{45^\circ}$ ;  $\sqrt[6]{2}_{165^\circ}$ ;  $\sqrt[6]{2}_{285^\circ}$ )

(\*) e)  $\sqrt[3]{-i}$  (Soluc:  $i$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$ )

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

<p>a) <math>x^3+8=0</math> (Soluc: <math>-2, 1 \pm \sqrt{3}i</math>)</p> <p>b) <math>x^4-16=0</math> (Soluc: <math>\pm 2, \pm 2i</math>)</p>	<p>d) <math>x^4+1=0</math> (Soluc: <math>\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i</math>)</p>
--	---

**ACTIVIDAD 8. VECTORES EN EL PLANO****Ángulo de dos vectores:**

33. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos (cada apartado en diferentes ejes):

a) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,3)$	(Soluc: $45^\circ$ )	e) $\vec{x} = (-5,12)$ y $\vec{y} = (8,-6)$	(Sol: $\cong 149^\circ 29'$ )
b) $\vec{u} = (\sqrt{3},1)$ y $\vec{v} = (1,\sqrt{3})$	(Soluc: $30^\circ$ )	f) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (-9,3)$	(Soluc: $135^\circ$ )

**Problemas con parámetros:**

46. Dados los vectores  $\vec{u} = (2,-1)$  y  $\vec{v} = (a,3)$ , calcular **a** de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales	(Soluc: $a=3/2$ )
b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen $60^\circ$	(Soluc: $a = \frac{24 + 15\sqrt{3}}{11}$ )
c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección	(Soluc: $a=-6$ )

47. Dados los vectores  $\vec{a} = (1,-1)$  y  $\vec{b} = (2,m)$ , hallar **m** de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.	(Soluc: $m=2$ )
b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección.	(Soluc: $m=-2$ )
c) $\vec{b}$ sea unitario.	(Soluc: $\nexists$ soluc.)
d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen $45^\circ$	(Soluc: $m=0$ )

**SEGUNDA PRUEBA:****ACTIVIDAD 9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO**

31.- Determinar el punto de corte de :  $r \equiv (x,y) = (-3,2) + \lambda(2,-1)$   $\lambda \in R$ ,  $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$   $\lambda \in R$  Sol: (1,0)

32.- En el triángulo A(1,2), B(5,1) y C(3,4) hallar la longitud de la altura sobre BC, la longitud del lado BC, la longitud de la altura y el área del triángulo. Sol:  $2x-3y+4=0$ ;  $\sqrt{13}$ ;  $10/\sqrt{13}$ ;  $5u^2$ .

33.- Calcular el área del triángulo limitado por las rectas  $r \equiv x-y-1=0$ ;  $s \equiv x+y-3=0$ ;  $t \equiv y-2=0$

34.- Hallar "a" y "b" de forma que las rectas  $r \equiv ax+by-1=0$  y  $s \equiv 2x-3y+4=0$  sean paralelas y r pase por el punto A(1,1). Sol:  $a=-2$  y  $b=3$

35.- Hallar "a" para que las tres rectas se corten en un punto:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}; \quad s \equiv 3x - y - 7 = 0 \quad y \quad t \equiv x + ay + 2a = 0$$

Sol:  $a=-9/7$

36.- Determinar la recta r que pasa por el punto de corte de las rectas  $s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$   $\lambda \in R$  y

$$t \equiv \frac{x}{-3} - \frac{y-1}{2} \text{ y es paralela a la recta } u \equiv \frac{x}{1/2} + \frac{y}{-3} - 1.$$

Sol:  $r \equiv 6x-y+1=0$

37.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,2), B(5,0), C y D. Se sabe que los lados AD y BC son paralelos a la recta  $(x,y) = (-7,2) + \lambda(1,1)$   $\lambda \in R$ , y que el punto P(6,4) pertenece a la recta que pasa por C y D. Hallar estos vértices. Sol: C(8,3), D(4,5).

38.- Dadas las rectas  $r \equiv 4x - y - 3 = 0$ ,  $s \equiv x + 2y - 12 = 0$  y  $t \equiv x - y = 0$  hallar:

- |  |                              |
|--|------------------------------|
| a) Los vértices del triángulo que determinan.                      | Sol: A(1,1), B(4,4), C(2,5). |
| b) La ecuación de la altura sobre el lado contenido en la recta t. | Sol: $x+y-7=0$ .             |
| c) La longitud del lado contenido en r.                            | Sol: $\sqrt{17}$ .           |
| d) La longitud de la altura sobre el lado contenido en s.          | Sol: $9/\sqrt{5}$ .          |
| e) Área del triángulo.   | Sol: $9/2$ .                 |

**ACTIVIDAD 10. DOMINIOS**

1.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones polinómicas y racionales:

a)  $f(x) = 2x + 1$

b)  $f(x) = x^3 - x - 8$

c)  $f(x) = x^2 + x + 1$

d)  $f(x) = x^9 - 6x^4 + 9$

e)  $f(x) = x^5 - 2x + 6$

f)  $f(x) = (x-1)^3$

g)  $f(x) = \frac{1}{7-3x}$

h)  $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$

i)  $f(x) = \frac{7}{x^2 - 5}$

j)  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

k)  $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$

l)  $f(x) = \frac{7x+9}{x^3 + 8}$

2.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones irracionales:

a)  $f(x) = 6x - 2\sqrt{x} + 8$

l)  $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 3}$

v)  $f(x) = -4 + \sqrt{x-1}$

b)  $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$

m)  $f(x) = \sqrt{3x - x^2 + 4}$

w)  $f(x) = \sqrt{4-2x}$

c)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

n)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

x)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

3.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \ln(-3x+2)$

j)  $f(x) = \log\left(\frac{x+7}{x}\right)$

r)  $f(x) = \frac{2^x}{2^x - 4}$

b)  $f(x) = \log\sqrt{-3x}$

k)  $f(x) = \frac{2x-9}{\log\sqrt{x+3}}$

s)  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

c)  $f(x) = \ln(5-x^2)$

l)  $f(x) = 5^{x-2}$

y)  $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$

**ACTIVIDAD 11. OPERACIONES CON FUNCIONES**

5.- Dadas las siguientes funciones, efectúa las operaciones que se indican, indicando el dominio de la función resultante:

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

$g(x) = x^2 - 6$

$h(x) = \frac{6x}{x^2 - 4}$

$p(x) = \sqrt{x+1}$

$j(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$k(x) = \frac{x+2}{x^2 - 1}$

$l(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

$m(x) = x - 4$

$s(x) = \frac{3-x}{x-1}$

$r(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

- |                |                |                |                |                |                |             |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| a) $f+g$       | d) $j+k$       | g) $j-r$       | j) $j-s$       | m) $h \cdot k$ | p) $j \cdot s$ | s) $k/s$    |
| b) $g/p$       | e) $g \circ m$ | h) $m \circ g$ | k) $f \circ m$ | n) $m \circ j$ | q) $p \circ r$ | t) $s^{-1}$ |
| c) $p \circ j$ | f) $s \circ p$ | i) $r \circ s$ | l) $m^{-1}$    | o) $j^{-1}$    | r) $r^{-1}$    | u) $g^{-1}$ |

**ACTIVIDAD 12. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES E INVERSA**

8.- Sean las funciones:  $f(x) = 3x + 2$  y  $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ , calcular: **a)**  $g \circ f$ ; **b)**  $f \circ g$

Sol:  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{3x+5}{6x+5}$      $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = \frac{7x+11}{2x+1}$

9.- Dadas las funciones:  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ;  $g(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$  y  $h(x) = \frac{1}{x}$ , calcular: **a)**  $g \circ f$ ; **b)**  $f \circ g$ ; **c)**  $h \circ g \circ f$ ; **d)**

$h \circ f \circ g$ ; **e)**  $f^{-1}$ ; **f)** Probar que  $f^{-1} \circ f = I$ ; **g)** Probar que:  $f \circ f^{-1} = I$

Sol: a)  $(g \circ f)(x) = \frac{3-2x}{2x+1}$ ; b)  $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ ; c)  $(h \circ g \circ f)(x) = \frac{2x+1}{3-2x}$ ; d)  $(h \circ f \circ g)(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$

10.- Dadas las funciones:  $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , Calcular: **a)**  $g \circ f$ , **b)**  $f \circ g$ , **c)**  $f^{-1}$ , **d)** Probar que  $f^{-1} \circ f = I$

Sol: a)  $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$ ; b)  $(f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}$ ; c)  $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x-1}$

## ACTIVIDAD 13. LÍMITES Y CONTINUIDAD

27.- Calcula los límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})$

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{7+x} - 3}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x} - 1}$

k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

l)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$

m)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

n)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + x - 3}$

ñ)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$

p)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

q)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$

r)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

s)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$

t)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{2 - \sqrt{x+4}}$

u)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$

v)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$

w)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{4x^2 - 5x + 2})$

Sol: a)  $-1/2$ ; b) 0; c)  $1/2$ ; d) 0; e) No existe; f)  $-2$ ; g) 1; h) 0; i) 24; j)  $-10$ ; k) 2; l)  $13/7$ ; m) 8; n)  $-7$ ; ñ)  $1/4$ ; o) 2; p)  $\frac{\sqrt{2}}{16}$ ; q)  $+\infty$ ; r)  $1/6$ ; s)  $1/3$ ; t)  $-4$ ; u) 0; v) 3; w)  $9/4$ .

26. Calcular cuánto debe valer  $a$  para que la siguiente función sea continua  $\forall x$ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc:  $a=0$ )

27. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua y  $f(2)=3$  (Soluc:  $a=1$  y  $b=-1$ )

29. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de  $m$  y  $n$  para que  $f(x)$  sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). (Soluc:  $m=3$ ,  $n=1$ )

30. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc:  $a=-1/2$ ,  $b=-3$ )

31. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc:  $a=-2$ ,  $b=1$ )



**ACTIVIDAD 14. ASÍNTOTAS**

1. Dada la curva de ecuación  $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$ , calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.  
 b) Asíntotas.  
 c) Gráfica aproximada.

2. Dada la curva de ecuación  $y = \frac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$ , calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.  
 a) Asíntotas.  
 b) Gráfica aproximada.

3. Dada la curva de ecuación  $y = \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ , calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.  
 b) Asíntotas.  
 c) Gráfica aproximada.

4. Dada la curva de ecuación  $y = \frac{x + 1}{x^2 + x - 2}$ , calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.  
 b) Asíntotas.  
 c) Gráfica aproximada.

5. Dada la curva de ecuación  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ , calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.  
 b) Asíntotas.  
 c) Gráfica aproximada.

**Observación :** puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

**ACTIVIDAD 15. DERIVADAS Y GRÁFICAS**

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a)  $y = \frac{1}{x^2}$       b)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$       c)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$       d)  $y = (x^2 - 3)^2$       e)  $y = \frac{2}{x^3}$   
 f)  $y = (x^2 + x + 1)^3$       g)  $y = \sqrt[3]{2x^3 - 3}$       h)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$       i)  $y = 3(x^2 + 1)^{10}$       j)  $y = 2(3x^2 - 1)^4$

k)  $y = \frac{2}{(x^2 + 1)^3}$

(Sol: a)  $y' = \frac{-2}{x^3}$ ; b)  $y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$ ; c)  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ; d)  $y' = 4x^3 - 12x$ ; e)  $y' = \frac{-6}{x^4}$ ; f)  $y' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$ ;

g)  $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3-3)^2}}$ ; h)  $y' = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ ; i)  $y' = 60x(x^2+1)^9$ ; j)  $y' = 48x(3x^2-1)^3$ ; k)  $y' = \frac{-12x}{(x^2+1)^4}$ )

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^3}$       b)  $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$       c)  $y = \frac{x + 1}{1 - x}$       d)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$       e)  $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$   
 f)  $y = (3x^2 + 5)^5$       g)  $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

(Sol: a)  $y' = \frac{-2}{x^3}$ ; b)  $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$ ; c)  $y' = \frac{2}{(1-x)^2}$ ; d)  $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ ; e)  $y' = 6x^3 - 2x$ ; f)  $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g)  $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ )

**Ecuación de la recta tangente:**

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$	(Sol: $6x-y+5=0$ )	c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$	(Sol: $y=-1$ )
b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$	(Sol: $10x-y+12=0$ )	d) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$	(Sol: $y=-12x+30$ )

**Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:**

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a)  $f(x)=x^2$

c)  $y=x^3-3x^2+1$

d)  $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e)  $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f)  $f(x)=x^3$

g)  $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h)  $y=x^3-3x^2-9x+1$

b)  $f(x)=x^4-2x^2$

i)  $f(x)=x^4-4x^3+1$

j)  $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$

k)  $y=2x^3-9x^2$

l)  $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m)  $y=x^3-12x$

(Soluc: a)  $\nearrow (0,\infty) \searrow (-\infty,0)$ ; b)  $\nearrow (-1,0) \cup (1,\infty) \searrow (-\infty,-1) \cup (0,1)$ ; c)  $\nearrow (-\infty,0) \cup (2,\infty) \searrow (0,2)$ ; d)  $\nearrow (-\infty,1) \cup (3,\infty) \searrow (1,3)$ ;  
e)  $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$ ; f)  $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$ ; g)  $\searrow (-\infty,0) \nearrow (0,\infty)$ ; h)  $\nearrow (-\infty,-1) \cup (3,\infty) \searrow (-1,3)$ ; i)  $\searrow (-\infty,3) \nearrow (3,\infty)$ )

20. Ídem para:

a)  $f(x)=x^3-3x$

b)  $y=\frac{x+2}{x-1}$

c)  $y=x^4-2x^2$

d)  $y=\frac{2x}{x^2+1}$

e)  $f(x)=x^3-3x^2$

f)  $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

g)  $y=-x^3+12x$

h)  $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$

i)  $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$

j)  $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.