



Instituto de Educación Secundaria
Alfonso X el Sabio
www.iax.es



Región de Murcia
Consejería de Educación,
Juventud y Deportes

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CUADERNILLO DE PENDIENTES

MATEMÁTICAS I

1º BACHILLERATO DE CIENCIAS

	PRUEBA 1: Del 12 al 14 de Enero	PRUEBA 2: Del 13 al 15 de Abril	PRUEBA GLOBAL: Del 4 al 5 de Mayo
Matemáticas I	1) Números reales y Álgebra 2) Trigonometría 3) Números complejos 4) Vectores	5) Geometría analítica 6) Funciones elementales 7) Límites y continuidad 8) Derivadas y aplicaciones	Toda la materia

RECOMENDACIONES

- ❖ **Para repasar la materia puedes realizar los ejercicios propuestos.**
- ❖ Para preparar la **primera prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 1 hasta la actividad 8.
- ❖ Para preparar la **segunda prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 9 hasta la actividad 15.
- ❖ **Cuantos más ejercicios hagas mejor preparado irás al examen.**

PRIMERA PRUEBA:**ACTIVIDAD 1. RADICALES**

1.- Reducir a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{7}$ b) $\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[3]{a^4}$ c) $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{ab}$
 Sol: a) $\sqrt[12]{4^3 \cdot 5^6 \cdot 7^3}$ b) $\sqrt[12]{a^9 \cdot a^4 \cdot a^8}$ c) $\sqrt[12]{b^6 \cdot a^4 \cdot a^3}$

2.- Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt{\frac{27}{4}}$ d) $4\sqrt{8b^3a^7}$
 e) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}}$ f) $\sqrt[3]{-125}$ g) $\sqrt[3]{\frac{b^6}{216}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}}$
 i) $\sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}}$ j) $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$ k) $\sqrt{4x^6y^{12}}$ l) $\sqrt[4]{14641}$

Sol: a) $2\sqrt{2}$; b) $2\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; d) $8a^3 \cdot b\sqrt{2ab}$; e) $\frac{9}{8}$; f) -5 ; g) $\frac{b^2}{6}$;
 h) $\frac{-1}{3b^2}$; i) $\frac{-2}{b^2}$; j) $\frac{6}{7}$; k) $2x^3y^6$; l) 11

3.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

a) $2x\sqrt{x}$ b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$ d) $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$
 e) $\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy}$ f) $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$ g) $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$ h) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}}$
 Sol: a) $\sqrt{4x^3}$; b) $\sqrt[3]{3^4}$; c) $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$; d) $\sqrt{\frac{x}{96}}$; e) $\sqrt{4x^3y}$; f) $\sqrt{3m^3x^5}$; g) $\sqrt[3]{\frac{a^4}{6}}$; h) $\sqrt{\frac{14}{3}}$

4.- Simplifica:

a) $\sqrt[3]{81b^7}$ b) $\sqrt[5]{128m^{10}}$ c) $\sqrt[7]{256b^{14}c^{11}}$
 d) $\sqrt[4]{b^7m^3}$ e) $\sqrt{2,7b^3}$ f) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}}$

Sol: a) $3\sqrt{3}$; b) $4\sqrt[5]{2}$; c) $\frac{97}{5}\sqrt{5}$; d) $-2\sqrt{3}$; e) $20\sqrt{11}$; f) $35\sqrt{7}$

ACTIVIDAD 2. LOGARITMOS

1.- Calcular:

a) $\log_2 8$ f) $\log_2 0,25$ k) $\log_4 64 + \log_8 64$ o) $\log 3 / \log 81$
 b) $\log_3 9$ g) $\log_{0,5} 16$ l) $\log 0,1 - \log 0,01$ p) $\log_2 3 \times \log_3 4$
 c) $\log_4 2$ h) $\log_{0,1} 100$ m) $\log 5 + \log 20$ q) $\log_9 25 \div \log_3 5$
 d) $\log_{27} 3$ i) $\log_3 27 + \log_3 1$ n) $\log 2 - \log 0,2$ r) $\log_a \sqrt[3]{a^2}$
 e) $\log_5 0,2$ j) $\log_5 25 - \log_5 5$ ñ) $\log 32 / \log 2$ s) $\log_{\sqrt{2}} 2$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0,5; d) 1/3; e) -1; f) -2; g) -4; h) -2; i) 3; j) 1; k) 5; l) 1; m) 2; n) 1; ñ) 5; o) 0,25; p) 2; q) 1; r) 2/3; s) 2

2.- Determinar el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_3 81 = x$ g) $\log_x 25 = -2$ m) $\log_4 64 = (2x - 1) / 3$
 b) $\log_5 0,2 = x$ h) $\log_{2x+3} 81 = 2$ n) $\log_6 [4(x - 1)] = 2$
 c) $\log_2 16 = x^3 / 2$ i) $x + 2 = 10^{\log 5}$ ñ) $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$
 d) $\log_2 x = -3$ j) $x = 10^{4 \log 2}$ o) $x = \log 625 / \log 125$
 e) $\log_7 x = 3$ k) $x = \log 8 / \log 2$ p) $\log(x + 1) / \log(x - 1) = 2$
 f) $\log_x 125 = 3$ l) $\log_{9/16} x = 3/2$ q) $\log(x - 7) / \log(x - 1) = 0,5$

Sol: a) 4; b) -1; c) 2; d) 1/8; e) 343; f) 5; g) 1/5; h) 3; i) 3; j) 16; k) 3; l) 27/64; m) 5; n) 10; ñ) 3; o) 4/3; p) 3; q) 10

ACTIVIDAD 3. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

9.- Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

a) $\log 4x = 3 \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 3$

g) $\frac{\log(7+x^2)}{\log(x-4)} = 2$

b) $\log(2x-4) = 2$

h) $2 \cdot \log(3x-4) = \log 100 + \log(2x+1)^2$

c) $2 \cdot \log(3-x) = -1$

i) $\log_2(x^2-1) - \log_2(x+1) = 2$

d) $\log(x+1) + \log x = \log(x+9)$

j) $\log^2 x - 3 \log x = -2$

e) $\log(x+3) = \log 2 - \log(x+2)$

k) $2 \cdot \log(x+5) = \log(x+7)$

f) $\log(x^2+15) = \log(x+3) + \log x$

l) $\log \sqrt{x-1} = \log(x+1) - \log \sqrt{x+4}$

Sol: a) 162; b) 52; c) No; d) ± 3 ; e) 4 y 1; f) 5; g) 9/8; h) -14/17 y -6/23; i) 5; j) 10 y 100; k) -3; l) 5

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_3(x+2) + \log_3(x-4) = 3$

b) $2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$

c) $\log_3\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) = 2$

d) $e^x - 6e^{-x} = 1$

e) $\log 2 + \log(11-x^2) = 2 \log(5-x)$

f) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

g) $3^x - 3^{1-x} = 2$

h) $2^{2x} - 2^x = 12$

i) $3 \log x - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$

j) $\log(5 \log 100) = x$

k) $3^{2x+1} - 5 = 11$

l) $7^{3x-2} = 1$

Sol: a) $x = 7$ b) $x = -1 - \frac{\log 3}{\log 2}$ c) $x = \frac{10}{17}$ d) $x = \ln 3$ e) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ f) $x = 2$ g) $x = 1$ h) $x = 2$ i) $x = 6$ j) $x = 2$ k) $x = \frac{2 \log 2}{\log 3} - \frac{1}{2}$ l) $x = \frac{2}{3}$

ACTIVIDAD 4. SISTEMAS LINEALES (MÉTODO DE GAUSS)

1) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

S.C.D. (1,-2,3)

2) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases}$

S.I.

13) $\begin{cases} x + y - 3z + w = 0 \\ x - y + z + w = 2 \\ x + 2y - 5z - w = -3 \\ x - 2y + 3z - 9w = -7 \end{cases}$

S.C.I. ($\lambda, 2-\lambda, \lambda, 1$)

14) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

25) $\begin{cases} -x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + y + 6z = 2 \end{cases}$

S.C.D. (5,-1,3)

26) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ -x + 5y - z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$

S.C.I. (18 λ , - λ , 13 λ)

37) $\begin{cases} 2x - 2y - z = 7 \\ 4x - 4y + 2z = 17 \\ 3x + 2y - 6z = -2 \end{cases}$

S.C.D. (41/20, -73/40, 3/4)

38) $\begin{cases} x + y + z = 515 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ -9x + 8y = 0 \end{cases}$

S.C.D. (160, 180, 175)

ACTIVIDAD 5. SISTEMAS NO LINEALES

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 290 \\ x + y = 24 \end{cases}$
(13,11); (11,13)

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
(0,3); (12/5, -9/5)

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y + 3 = 3x \end{cases}$
(2,3); (-1/5, -18/5)

4. $\begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ y + 5 = 3x \end{cases}$
(2,1); (25/18, -5/6)

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - \frac{3}{4}y = 0 \end{cases}$
(3,4); (-3,-4)

6. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 22 \\ x + y = 5 \end{cases}$
(2,3); (11/2, -1/2)

7. $\begin{cases} 4x^2 - xy = 2(x+y) \\ y - x = 1 \end{cases}$
(2,3); (-1/3, 2/3)

8. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$
(2,3); (3,2)

9. $\begin{cases} y = 1 + 2x \\ x^2 + y^2 + 6x = 16 \end{cases}$
(1,3); (-3,-5)

10. $\begin{cases} x = 3y - 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{-1}{2} \end{cases}$ (2,1); (1,2/3)

11. $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ (2,4); (4,2)

12. $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$ (3,3)

13. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (9,8)

14. $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ (1,2); (2,1)

15. $\begin{cases} 4xy - 6y = 3 \\ 3x - 8y = 5 \end{cases}$ (3,1/2); (1/6, -9/16)

16. $\begin{cases} 3xy - 4y^2 = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ (1/3,0); (2/3, 1/2)

ACTIVIDAD 6. TRIGONOMETRÍA

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) $a=6$ m, $B=45^\circ$, $C=105^\circ$ (Soluc: $A=30^\circ$, $b \approx 8,49$ m, $c \approx 11,59$ m, $S_{ABC} \approx 24,60$ m²)

b) $a=10$ dam, $b=7$ dam, $C=30^\circ$ (Soluc: $c \approx 5,27$ dam, $B \approx 41^\circ 38'$, $A \approx 108^\circ 22'$)

c) $b=35,42$ dm, $A=49^\circ 38'$, $B=70^\circ 21'$ (Soluc: $C=60^\circ 1'$, $a \approx 28,66$ dm, $c \approx 32,58$ dm, $S_{ABC} \approx 439,94$ dm²)

d) $a=13$ m, $b=14$ m, $c=15$ m (Soluc: $A \approx 53^\circ 7' 48''$, $B \approx 59^\circ 29' 23''$, $C \approx 67^\circ 22' 48''$, $S_{ABC} \approx 84$ m²)

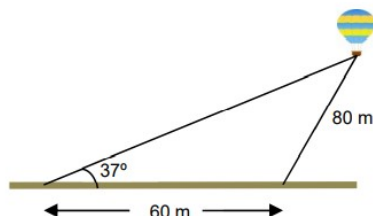
Problemas de planteamiento:

67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30° . A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45° . Calcular la altura de la montaña.
(Soluc: $\approx 136,60$ m)

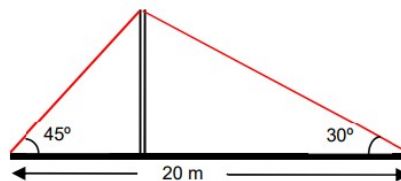
68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20° y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120° . ¿Cuál es la anchura del río? (Soluc: $\approx 53,21$ m)

69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° . ¿Cuánto distan A y C? (Soluc: ≈ 13 km 77 m)

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
(Sol: cable=25 m; mástil=7,32 m)



71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. (Sol: $\approx 71,80$ m y 119.31 m. respectivamente)

**Ecuaciones trigonométricas:**

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Sol: $x=60^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=120^\circ+k \cdot 360^\circ$)

f) $\sin x = 0$ (Sol: $x=k \cdot 180^\circ$)

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Sol: $x=135^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=225^\circ+k \cdot 360^\circ$)

g) $\cos x = -1$ (Sol: $x=(2k+1) \cdot 180^\circ$)

h) $\operatorname{cosec} x = -2$ (Sol: $x=210^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=330^\circ+k \cdot 360^\circ$)

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k \cdot 360^\circ$)

o) $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$ (Sol: $x=90^\circ+k \cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k \cdot 180^\circ$)

b) $\sin x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$
(Sol: 30° , 150° , $\approx 311^\circ 24' 35''$ y $\approx 228^\circ 35' 25''$)

p) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$ (Sol: $x=30^\circ+k \cdot 360^\circ$; $x=150^\circ+k \cdot 360^\circ$)

c) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (Sol: $x=45^\circ+k \cdot 180^\circ$)

q) $4\sin^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ (Sol: $x=k \cdot 180^\circ$; $x=45^\circ+k \cdot 90^\circ$)

r) $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
(Sol: $x=36^\circ 52' 11,6''+k \cdot 180^\circ$; $x=135^\circ+k \cdot 180^\circ$)

ACTIVIDAD 7. NÚMEROS COMPLEJOS

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ (Soluc: $2i$)

b) $(2-2i)^2$ (Soluc: $-8i$)

c) $(1+i)^3$ (Soluc: $-2+2i$)

d) $(2+3i)^3$ (Soluc: $-46+9i$)

e) $(1-i)^4$ (Soluc: -4)

f) $(-2+i)^5$ (Soluc: $38+41i$)

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ (Soluc: $\frac{2}{17} + \frac{8}{17}i$)

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ (Soluc: $\frac{1}{2} - i$)

i) $(i^4 + i^{-13})^3$ (Soluc: $-2-2i$)

j) $(1+i)^{20}$ (Soluc: -1024)

k) $(-2+2\sqrt{3}i)^6$ (Soluc: 4096)

l) $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ (Soluc: -1)

m) $(4-4\sqrt{3}i)^3$ (Soluc: -512)

n) $(-2+2\sqrt{3}i)^4$ (Soluc: $-128+128\sqrt{3}i$)

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ (Soluc: $-16\sqrt{3}-16i$)

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}\right)^3$ (Soluc: $27i$)

q) $(-1+i)^{30}$ (Soluc: $2^{15}i$)

r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ (Soluc: $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$)

54. Dados los complejos $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 3i$ y $z_3 = 1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\frac{z_1 + z_2}{z_3}$ b) $z_1 \cdot z_3$ c) $(z_1)^4$ d) $\overline{z_2}$ (Sol: a) $\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$; b) $(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$; c) $-8+8\sqrt{3}i$; d) $-3i$)

55. Dado el complejo $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, calcular $z^5 \cdot \bar{z}$ (Soluc: -64)

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con (*)), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ (Soluc: $\sqrt[8]{2}_{11,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{101,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{191,25^\circ}$; $\sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}$)

b) $\sqrt[3]{1-i}$ (Soluc: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$)

(*) c) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}i}}$ (Soluc: $\sqrt[4]{2}_{60^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{150^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{240^\circ}$; $\sqrt[4]{2}_{330^\circ}$)

d) $\sqrt[3]{\frac{-1+3i}{2-i}}$ (Soluc: $\sqrt[6]{2}_{45^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{165^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{285^\circ}$)

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ (Soluc: i ; $-\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$)

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ (Soluc: $-2, 1 \pm \sqrt{3}i$)

b) $x^4-16=0$ (Soluc: $\pm 2, \pm 2i$)

d) $x^4+1=0$ (Soluc: $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$)

ACTIVIDAD 8. VECTORES EN EL PLANO**Ángulo de dos vectores:**

33. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos (cada apartado en diferentes ejes):

a) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,3)$	(Soluc: 45°)	e) $\vec{x} = (-5,12)$ y $\vec{y} = (8,-6)$	(Sol: $\cong 149^\circ 29'$)
b) $\vec{u} = (\sqrt{3},1)$ y $\vec{v} = (1,\sqrt{3})$	(Soluc: 30°)	f) $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (-9,3)$	(Soluc: 135°)

Problemas con parámetros:

46. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1)$ y $\vec{v} = (a,3)$, calcular a de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales	(Soluc: $a=3/2$)
b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60°	(Soluc: $a = \frac{24+15\sqrt{3}}{11}$)
c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección	(Soluc: $a=-6$)

47. Dados los vectores $\vec{a} = (1,-1)$ y $\vec{b} = (2,m)$, hallar m de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.	(Soluc: $m=2$)
b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección.	(Soluc: $m=-2$)
c) $\vec{b}$ sea unitario.	(Soluc: $\nexists$ soluc.)
d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45°	(Soluc: $m=0$)

SEGUNDA PRUEBA:**ACTIVIDAD 9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO**

31.- Determinar el punto de corte de: $r \equiv (x,y) = (-3,2) + \lambda(2,-1)$ $\lambda \in R$, $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ Sol: (1,0)

32.- En el triángulo A(1,2), B(5,1) y C(3,4) hallar la longitud de la altura sobre BC, la longitud del lado BC, la longitud de la altura y el área del triángulo.
Sol: $2x-3y+4=0$; $\sqrt{13}$; $10/\sqrt{13}$; $5u^2$.

33.- Calcular el área del triángulo limitado por las rectas $r \equiv x-y-1=0$; $s \equiv x+y-3=0$; $t \equiv y-2=0$

34.- Hallar "a" y "b" de forma que las rectas $r \equiv ax+by-1=0$ y $s \equiv 2x-3y+4=0$ sean paralelas y r pase por el punto A(1,1).
Sol: $a=-2$ y $b=3$

35.- Hallar "a" para que las tres rectas se corten en un punto:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1}; \quad s \equiv 3x-y-7=0 \quad y \quad t \equiv x+ay+2a=0$$

Sol: $a=-9/7$

36.- Determinar la recta r que pasa por el punto de corte de las rectas $s \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ y

$$t \equiv \frac{x}{-3} - \frac{y-1}{2} \text{ y es paralela a la recta } u \equiv \frac{x}{1/2} + \frac{y}{-3} - 1.$$

Sol: $r \equiv 6x-y+1=0$

37.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,2), B(5,0), C y D. Se sabe que los lados AD y BC son paralelos a la recta $(x,y)=(-7,2)+\lambda(1,1)$ $\lambda \in R$, y que el punto P(6,4) pertenece a la recta que pasa por C y D. Hallar estos vértices.
Sol: C(8,3), D(4,5).

38.- Dadas las rectas $r \equiv 4x-y-3=0$, $s \equiv x+2y-12=0$ y $t \equiv x-y=0$ hallar:

- | | |
|--|------------------------------|
| a) Los vértices del triángulo que determinan. | Sol: A(1,1), B(4,4), C(2,5). |
| b) La ecuación de la altura sobre el lado contenido en la recta t. | Sol: $x+y-7=0$. |
| c) La longitud del lado contenido en r. | Sol: $\sqrt{17}$. |
| d) La longitud de la altura sobre el lado contenido en s. | Sol: $9/\sqrt{5}$. |
| e) Área del triángulo. | Sol: $9/2$. |

ACTIVIDAD 10. DOMINIOS

1.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones polinómicas y racionales:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = 2x + 1$ | b) $f(x) = x^3 - x - 8$ | c) $f(x) = x^2 + x + 1$ |
| d) $f(x) = x^9 - 6x^4 + 9$ | e) $f(x) = x^5 - 2x + 6$ | f) $f(x) = (x-1)^3$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{7-3x}$ | h) $f(x) = \frac{1}{4x^2-1}$ | i) $f(x) = \frac{7}{x^2-5}$ |
| j) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ | k) $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$ | l) $f(x) = \frac{7x+9}{x^3+8}$ |

2.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones irracionales:

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = 6x - 2\sqrt{x} + 8$ | l) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x - 3}$ | v) $f(x) = -4 + \sqrt{x-1}$ |
| b) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$ | m) $f(x) = \sqrt{3x-x^2+4}$ | w) $f(x) = \sqrt{4-2x}$ |
| c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ | n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | x) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$ |

3.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

- | | | |
|----------------------------|--|-------------------------------|
| a) $f(x) = \ln(-3x+2)$ | j) $f(x) = \log\left(\frac{x+7}{x}\right)$ | r) $f(x) = \frac{2^x}{2^x-4}$ |
| b) $f(x) = \log\sqrt{-3x}$ | k) $f(x) = \frac{2x-9}{\log\sqrt{x+3}}$ | s) $f(x) = \sqrt{e^x-1}$ |
| c) $f(x) = \ln(5-x^2)$ | l) $f(x) = 5^{x-2}$ | y) $f(x) = \sqrt[3]{e^x-1}$ |

ACTIVIDAD 11. OPERACIONES CON FUNCIONES

5.- Dadas las siguientes funciones, efectúa las operaciones que se indican, indicando el dominio de la función resultante:

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad g(x) = x^2-6 \quad h(x) = \frac{6x}{x^2-4} \quad p(x) = \sqrt{x+1} \quad j(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$k(x) = \frac{x+2}{x^2-1} \quad l(x) = \sqrt{x^2-4x+3} \quad m(x) = x-4 \quad s(x) = \frac{3-x}{x-1} \quad r(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

- | | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| a) $f+g$ | d) $j+k$ | g) $j-r$ | j) $j-s$ | m) $h \cdot k$ | p) $j \cdot s$ | s) k/s |
| b) g/p | e) $g \circ m$ | h) $m \circ g$ | k) $f \circ m$ | n) $m \circ j$ | q) $p \circ r$ | t) s^{-1} |
| c) $p \circ j$ | f) $s \circ p$ | i) $r \circ s$ | l) m^{-1} | o) j^{-1} | r) r^{-1} | u) g^{-1} |

ACTIVIDAD 12. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES E INVERSA

8.- Sean las funciones: $f(x) = 3x+2$ y $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$, calcular: **a)** $g \circ f$; **b)** $f \circ g$

$$\text{Sol: } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{3x+5}{6x+5} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = \frac{7x+11}{2x+1}$$

9.- Dadas las funciones: $f(x) = \frac{1}{2x-1}$; $g(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, calcular: **a)** $g \circ f$; **b)** $f \circ g$; **c)** $h \circ g \circ f$; **d)**

h $\circ f \circ g$; **e)** f^{-1} ; **f)** Probar que $f^{-1} \circ f = I$; **g)** Probar que: $f \circ f^{-1} = I$

$$\text{Sol: a) } (g \circ f)(x) = \frac{3-2x}{2x+1}; \text{ b) } (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{2x-3}; \text{ c) } (h \circ g \circ f)(x) = \frac{2x+1}{3-2x}; \text{ d) } (h \circ f \circ g)(x) = \frac{2x-3}{2x+1}$$

10.- Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, Calcular: **a)** $g \circ f$, **b)** $f \circ g$, **c)** f^{-1} , **d)** Probar que $f^{-1} \circ f = I$

$$\text{Sol: a) } (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}; \text{ b) } (f \circ g)(x) = \frac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1}; \text{ c) } f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x-1}$$

ACTIVIDAD 13. LÍMITES Y CONTINUIDAD

27.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{7+x} - 3}$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{1-x} - 1}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$

r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$

s) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - ax}{x^2 + ax - 2a^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x-1}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{2 - \sqrt{x+4}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 5}{x^3 + x - 3}$

u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

ñ) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$

w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{4x^2 - 5x + 2})$

Sol: a) $-1/2$; b) 0; c) $1/2$; d) 0; e) No existe; f) -2 ; g) 1; h) 0; i) 24; j) -10 ; k) 2; l) $13/7$; m) 8; n) -7 ; ñ) $1/4$; o) 2; p) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; q) $+\infty$; r) $1/6$; s) $1/3$; t) -4 ; u) 0; v) 3; w) $9/4$.26. Calcular cuánto debe valer a para que la siguiente función sea continua $\forall x$:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=0$)

27. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y $f(2)=3$ (Soluc: $a=1$ y $b=-1$)

29. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ mx+n & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

hallar los valores de m y n para que $f(x)$ sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). (Soluc: $m=3$, $n=1$)

30. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-1/2$, $b=-3$)

31. Ídem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Soluc: $a=-2$, $b=1$)

ACTIVIDAD 14. ASÍNTOTAS

1. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{x^2 - x - 6}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

2. Dada la curva de ecuación $y = \frac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
a) Asíntotas.
b) Gráfica aproximada.

3. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, calcular:

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

4. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x + 1}{x^2 + x - 2}$, calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

5. Dada la curva de ecuación $y = \frac{x^2 - 1}{x}$, calcula

- a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

ACTIVIDAD 15. DERIVADAS Y GRÁFICAS

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $y = (x^2 - 3)^2$

e) $y = \frac{2}{x^3}$

f) $y = (x^2 + x + 1)^3$

g) $y = \sqrt[3]{2x^3 - 3}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

i) $y = 3(x^2 + 1)^{10}$

j) $y = 2(3x^2 - 1)^4$

k) $y = \frac{2}{(x^2 + 1)^3}$

(Sol: a) $y' = \frac{-2}{x^3}$; b) $y' = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2}$; c) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; d) $y' = 4x^2 - 12x$; e) $y' = \frac{-6}{x^4}$; f) $y' = 3(2x + 1)(x^2 + x + 1)^2$;

g) $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3 - 3)^2}}$; h) $y' = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$; i) $y' = 60x(x^2 + 1)^9$; j) $y' = 48x(3x^2 - 1)^3$; k) $y' = \frac{-12x}{(x^2 + 1)^4}$)

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

c) $y = \frac{x + 1}{1 - x}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$

f) $y = (3x^2 + 5)^5$

g) $y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$

(Sol: a) $y' = \frac{-2}{x^3}$; b) $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$; c) $y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$; d) $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$; e) $y' = 6x^3 - 2x$; f) $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$)

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$

(Sol: $6x-y+5=0$)

c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$

(Sol: $y=-1$)

b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$

(Sol: $10x-y+12=0$)

d) $f(x)=\frac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$

(Sol: $y=-12x+30$)

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $y=x^3-3x^2+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

j) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+3$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

k) $y=2x^3-9x^2$

f) $f(x)=x^3$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

m) $y=x^3-12x$

h) $y=x^3-3x^2-9x+1$

(Soluc: a) $\nearrow (0,\infty) \searrow (-\infty,0)$; b) $\nearrow (-1,0) \cup (1,\infty) \searrow (-\infty,-1) \cup (0,1)$; c) $\nearrow (-\infty,0) \cup (2,\infty) \searrow (0,2)$; d) $\nearrow (-\infty,1) \cup (3,\infty) \searrow (1,3)$;

e) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; f) $\nearrow \forall x \in \mathbb{R}$; g) $\searrow (-\infty,0) \nearrow (0,\infty)$; h) $\nearrow (-\infty,-1) \cup (3,\infty) \searrow (-1,3)$; i) $\searrow (-\infty,3) \nearrow (3,\infty)$)

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $y=\frac{x+2}{x-1}$

c) $y=x^4-2x^2$

d) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

e) $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

g) $y=-x^3+12x$

h) $f(x)=\frac{9}{x^2-9}$

i) $f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$

j) $y=\frac{x}{x^2+x+1}$

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

MODELO DEL PRIMER PARCIAL DE PENDIENTES

- 1) (10p) Opera simplificando al máximo:

$$(2\sqrt{5}-3)^2 - (2\sqrt{5}+3)^2$$

- 2) (10p) Resuelve por GAUSS el sistema:

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + y + 6z = 2 \end{cases}$$

- 3) (10p) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:

$$\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} = 2$$

- 4) (10p) Resuelve la siguiente ecuación exponencial:

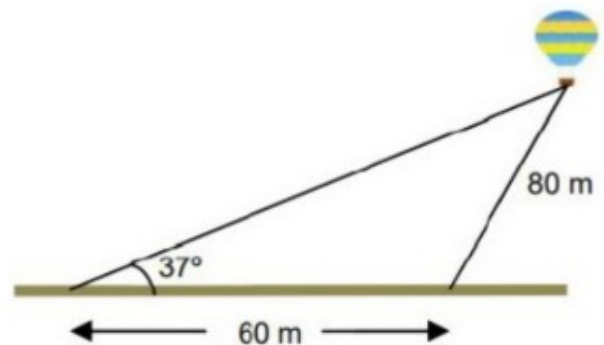
$$2^{2+x} - 2^{1+x} + 2^x = \frac{1}{2}$$

- 5) (10p) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos(2x) - 3\operatorname{sen}x + 1 = 0$$

- 6) (10p) Resuelve en el plano complejo la ecuación $z^3 + 8 = 0$.

- 7) Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60m. El cable más corto mide 80m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Hallar la altura del globo (5p) y la longitud del cable más extenso (5p).



- 8) (10 p) Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(2,1)$ y $\vec{v}(1,2)$

MODELO DEL SEGUNDO PARCIAL DE PENDIENTES

1) Dados los puntos A(1,5) y B(3,-2), hallar:

- a) (5p) La ecuación general de la recta que pasa por A y B.
- b) (5p) La ecuación explícita de la mediatriz del segmento AB.

2) Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) (4p) $f(x) = \frac{1}{4x^2 - x}$

b) (6p) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

3) (10p) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 1}$$

4) (10p) Hallar la ecuación general de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + 8$ en el punto de abscisa $x=1$.

5) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) (5p) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$

b) (5p) $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

6) (6p) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

Hacer una gráfica (4p) aproximada.