Instituto de Educación Secundaria
Alfonso X el Sabio
www.iax.es

Región de Murcia
Consejería de Educación,
Juventud y Deportes

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CUADERNILLO DE PENDIENTES

MATEMÁTICAS I

1º BACHILLERATO DE CIENCIAS

	PRUEBA 1: Del 11 al 13 de Enero	PRUEBA 2: Del 12 al 14 de Abril	PRUEBA GLOBAL: Del 3 al 5 de Mayo
Matemáticas I	1) Números reales y Álgebra 2) Trigonometría 3) Números complejos 4) Vectores	5) Geometría analítica 6) Funciones elementales 7) Límites y continuidad 8) Derivadas y aplicaciones	Toda la materia

RECOMENDACIONES

- **Para repasar la materia puedes realizar los ejercicios propuestos.**
- Para preparar la **primera prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 1 hasta la actividad 8.
- Para preparar la **segunda prueba** te recomendamos que practiques haciendo los ejercicios desde la actividad 9 hasta la actividad 15.
- **Cuantos más ejercicios hagas mejor preparado irás al examen.**

PRIMERA PRUEBA:

ACTIVIDAD 1. RADICALES

1.- Reducir a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{4}, \sqrt{5}, \sqrt[4]{7}$ **b)** $\sqrt[4]{a^3}, \sqrt[6]{a^2}, \sqrt[3]{a^4}$ **c)** $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{ab}$

Sol: a) $\sqrt[12]{4^4}, \sqrt[12]{5^6}, \sqrt[12]{7^3}$ b) $\sqrt[12]{a^9}, \sqrt[12]{a^4}, a\sqrt[12]{a^4}$ c) $\sqrt[12]{b^6}, \sqrt[12]{a^4}, \sqrt[12]{b^3 \cdot a^3}$

2.- Extraer factores de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{16}$ **c)** $\sqrt{\frac{27}{4}}$ **d)** $4\sqrt{8b^3a^7}$

e) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}}$ **f)** $\sqrt[3]{-125}$ **g)** $\sqrt[3]{\frac{b^6}{216}}$ **h)** $\sqrt[3]{\frac{-1}{27b^6}}$

i) $\sqrt[5]{\frac{-32}{b^{10}}}$ **j)** $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}$ **k)** $\sqrt{4x^6y^{12}}$ **l)** $\sqrt[4]{14641}$

Sol: a) $2\sqrt{2}$; b) $2\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$; d) $8 \cdot a^3 \cdot b\sqrt{2ab}$; e) $\frac{9}{8}$; f) -5; g) $\frac{b^2}{6}$; h) $\frac{-1}{3b^2}$; i) $\frac{-2}{b^2}$; j) $\frac{6}{7}$; k) $2x^3y^6$; l) 11

3.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

a) $2x\sqrt{x}$ **b)** $3\sqrt[3]{3}$ **c)** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$ **d)** $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$

e) $\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy}$ **f)** $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$ **g)** $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$ **h)** $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{21}}$

Sol: a) $\sqrt{4x^3}$; b) $\sqrt[3]{3^4}$; c) $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$; d) $\sqrt{\frac{x}{96}}$; e) $\sqrt{4x^3y}$; f) $\sqrt{3m^3x^5}$; g) $\sqrt[3]{\frac{a^4}{6}}$; h) $\sqrt{\frac{14}{3}}$

4.- Simplifica:

a) $\sqrt[3]{81b^7}$ **b)** $\sqrt[5]{128m^{10}}$ **c)** $\sqrt[7]{256b^{14}c^{11}}$

d) $\sqrt[4]{b^7m^3}$ **e)** $\sqrt{2,\hat{7}b^3}$ **f)** $\sqrt[5]{\frac{1}{243}b^7m^{45}}$

c) $\sqrt{8}\left(\sqrt{2}-5\sqrt{6}+\sqrt{18}\right)$ **d)** $\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\cdot\left(7\sqrt{3}-2\right)$

e) $\sqrt{\sqrt{13}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}$ **f)** $\left(9\sqrt{5}-7\right)\cdot\left(9\sqrt{5}+7\right)$

Sol: a) $7+5\sqrt{7}$ b) 2 c) $16-20\sqrt{3}$ d) $42-4\sqrt{3}+35\sqrt{6}-10\sqrt{2}$ e) 2 f) 356

10.- Calcular las siguientes sumas:

a) $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}-\sqrt{12}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{64}$

c) $5\sqrt[6]{8}-3(\sqrt{4}+\sqrt[10]{32})-8\sqrt[8]{16}+\frac{1}{\sqrt{8}}$

Sol: a) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{11}{2}\sqrt{2}$ c) $-\frac{1}{4}\left(23\sqrt{2}-24\right)$

11.- Realiza las siguientes sumas:

a) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+4\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-5\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-3\sqrt{5}+8\sqrt{5}$

e) $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+5\sqrt{50}-3\sqrt{32}$ f) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$

g) $4\sqrt{12}-3\sqrt{75}+6\sqrt{300}-\sqrt{108}$ h) $\sqrt{75a^3b^2}+\sqrt{3ab^4}$

Sol: a) $5\sqrt{2}$; b) 0; c) $3\sqrt{2}$; d) $14\sqrt{5}$; e) $8\sqrt{2}$; f) $6\sqrt{6}$; g) $47\sqrt{3}$; h) $\left(5ab+b^2\right)\sqrt{3a}$

12.- Opera:

a) $2\sqrt{20}+4\sqrt{80}-5\sqrt{180}+3\sqrt{125}$ b) $\frac{1}{4}\sqrt{128}+6\sqrt{512}-\frac{1}{2}\sqrt{32}-3\sqrt{98}$

c) $\frac{2}{5}\sqrt{20}-\frac{3}{5}\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{180}+6\sqrt{45}$ d) $\frac{4}{3}\sqrt{27}-\frac{1}{3}\sqrt{243}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}$

e) $5\sqrt{44}-3\sqrt{275}+6\sqrt{396}-\sqrt{1331}$ f) $7\sqrt{28}-4\sqrt{63}+5\sqrt{343}-2\sqrt{7}$

Sol: a) $5\sqrt{5}$; b) $75\sqrt{2}$; c) $\frac{97}{5}\sqrt{5}$; d) $-2\sqrt{3}$; e) $20\sqrt{11}$; f) $35\sqrt{7}$

ACTIVIDAD 2. LOGARITMOS

1.- Calcular:

a) $\log_2 8$ **f)** $\log_2 0{,}25$ **k)** $\log_4 64 + \log_8 64$ **o)** $\log 3 / \log 81$

b) $\log_3 9$ **g)** $\log_{0{,}5} 16$ **l)** $\log 0{,}1 - \log 0{,}01$ **p)** $\log_2 3 \times \log_3 4$

c) $\log_4 2$ **h)** $\log_{0{,}1} 100$ **m)** $\log 5 + \log 20$ **q)** $\log_9 25 \div \log_3 5$

d) $\log_{27} 3$ **i)** $\log_3 27 + \log_3 1$ **n)** $\log 2 - \log 0{,}2$ **r)** $\log_a \sqrt[3]{a^2}$

e) $\log_5 0{,}2$ **j)** $\log_5 25 - \log_5 5$ **ñ)** $\log 32 / \log 2$ **s)** $\log_{\sqrt{2}} 2$

Sol: a) 3; b) 2; c) 0,5; d) 1 / 3; e) – 1; f) – 2; g) – 4; h) – 2; i) 3; j) 1; k) 5; l) 1; m) 2; n) 1; ñ) 5; o) 0,25; p) 2; q) 1; r) 2/3; s) 2

2.- Determinar el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_3 81 = x$ **g)** $\log_x 25 = -2$ **m)** $\log_4 64 = (2x - 1)/3$

b) $\log_5 0{,}2 = x$ **h)** $\log_{2x+3} 81 = 2$ **n)** $\log_6 [4(x - 1)] = 2$

c) $\log_2 16 = x^3/2$ **i)** $x + 2 = 10^{\log 5}$ **ñ)** $\log_8 [2(x^3 + 5)] = 2$

d) $\log_2 x = -3$ **j)** $x = 10^{4 \log 2}$ **o)** $x = \log 625 / \log 125$

e) $\log_7 x = 3$ **k)** $x = \log 8 / \log 2$ **p)** $\log(x + 1) / \log(x - 1) = 2$

f) $\log_x 125 = 3$ **l)** $\log_{9/16} x = 3/2$ **q)** $\log(x - 7) / \log(x - 1) = 0{,}5$

Sol: a) 4; b) – 1; c) 2; d) 1/8; e) 343; f) 5; g) 1/5; h) 3; i) 3; j) 16; k) 3; l) 27/64; m) 5; n) 10; ñ) 3; o) 4/3; p) 3; q) 10

ACTIVIDAD 3. ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

9.- Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales:

a) $\log 4x = 3\cdot\log 2 + 4\cdot\log 3$

b) $\log (2x-4) = 2$

c) $2\cdot\log (3 - x) = -1$

d) $\log (x + 1) + \log x = \log (x + 9)$

e) $\log (x + 3) = \log 2 - \log (x + 2)$

f) $\log (x^2 + 15) = \log (x + 3) + \log x$

g) $\dfrac{\log(7+x^2)}{\log(x-4)} = 2$

h) $2\cdot\log (3x-4) = \log 100 + \log (2x+1)^2$

i) $\log_2 (x^2 - 1) - \log_2 (x + 1) = 2$

j) $\log^2 x - 3\log x = -2$

k) $2\cdot\log (x + 5) = \log (x + 7)$

l) $\log\sqrt{x-1} = \log(x+1) - \log\sqrt{x+4}$

Sol: **a)** 162; **b)** 52; **c)** No; **d)** ±3; **e)** 4 y 1; **f)** 5; **g)** 9/8; **h)** -14/17 y -6/23; **i)** 5; **j)** 10 y 100; **k)** -3; **l)** 5

10.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_3(x+2)+\log_3(x-4)=3$ **b)** $2^{2+x}-2^{1+x}+2^x=\frac{1}{2}$ **c)** $\log_3\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2$ **d)** $e^x-6e^{-x}=1$

e) $\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\log(5-x)$ **f)** $\log_3(3^x-8)=2-x$ **g)** $3^x-3^{1-x}=2$ **h)** $2^{2x}-2^x=12$

i) $3\log x-\log 30=\log\frac{x^2}{5}$ **j)** $\log(5\log 100)=x$ **k)** $3^{2x+1}-5=11$ **l)** $7^{3x-2}=1$

Sol: *a)* $x=7$ *b)* $x=-1-\frac{\log 3}{\log 2}$ *c)* $x=\frac{10}{17}$ *d)* $x=\ln 3$ *e)* $\begin{cases}x_1=3\\x_2=\frac{1}{3}\end{cases}$ *f)* $x=2$ *g)* $x=1$ *h)* $x=2$ *i)* $x=6$ *j)* $x=2$ *k)* $x=\frac{2\log 2}{\log 3}-\frac{1}{2}$ *l)* $x=\frac{2}{3}$

ACTIVIDAD 4. SISTEMAS LINEALES (MÉTODO DE GAUSS)

1) $\begin{cases}x+y+z=2\\3x-2y-z=4\\-2x+y+2z=2\end{cases}$ *S.C.D (1,-2,3)*

2) $\begin{cases}3x-4y+2z=1\\-2x-3y+z=2\\5x-y+z=5\end{cases}$ *S.I.*

13) $\begin{cases}x+y-3z+w=0\\x-y+z+w=2\\x+2y-5z-w=-3\\x-2y+3z-9w=-7\end{cases}$ *S.C.I. (λ,2-λ,λ,1)*

14) $\begin{cases}2x-5y+3z=0\\-x+y-z=0\\2x-y=0\end{cases}$

25) $\begin{cases}-x-3y+2z=4\\2x+y-3z=0\\-3x+y+6z=2\end{cases}$ *S.C.D. (5,-1,3)*

26) $\begin{cases}3x-2y+4z=0\\-x+5y-z=0\\x+8y+2z=0\end{cases}$ *S.C.I. (18λ,-λ,13λ)*

37) $\begin{cases}2x-2y-z=7\\4x-4y+2z=17\\3x+2y-6z=-2\end{cases}$ *S.C.D. (41/20,-73/40,3/4)*

38) $\begin{cases}x+y+z=515\\x+3y-4z=0\\-9x+8y=0\end{cases}$ *S.C.D. (160, 180, 175)*

ACTIVIDAD 5. SISTEMAS NO LINEALES

1. $\begin{cases}x^2+y^2=290\\x+y=24\end{cases}$ (13,11); (11,13)

2. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\2x+y=3\end{cases}$ (0,3); (12/5,-9/5)

3. $\begin{cases}x^2+y^2=13\\y+3=3x\end{cases}$ (2,3); (-1/5,-18/5)

4. $\begin{cases}x-2y^2=0\\y+5=3x\end{cases}$ (2,1); (25/18,-5/6)

5. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\x-\frac{3}{4}y=0\end{cases}$ (3,4); (-3,-4)

6. $\begin{cases}x^2+3xy=22\\x+y=5\end{cases}$ (2,3); (11/2,-1/2)

7. $\begin{cases}4x^2-xy=2(x+y)\\y-x=1\end{cases}$ (2,3); (-1/3,2/3)

8. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7\\x+y=5\end{cases}$ (2,3); (3,2)

9. $\begin{cases}y=1+2x\\x^2+y^2+6x=16\end{cases}$ (1,3); (-3,-5),

10. $\begin{cases}x=3y-1\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{-1}{2}\end{cases}$ (2,1); (1,2/3)

11. $\begin{cases}xy=8\\x+y=6\end{cases}$ (2,4); (4,2)

12. $\begin{cases}x+y=6\\xy=9\end{cases}$ (3,3)

13. $\begin{cases}x^2-y^2=17\\x-y=1\end{cases}$ (9,8)

14. $\begin{cases}x+y=3\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}\end{cases}$ (1,2); (2,1)

15. $\begin{cases}4xy-6y=3\\3x-8y=5\end{cases}$ (3;1/2); (1/6,-9/16)

16. $\begin{cases}3xy-4y^2=0\\3x-2y=1\end{cases}$ (1/3,0); (2/3,1/2)

ACTIVIDAD 6. TRIGONOMETRÍA

60. Resolver los siguientes triángulos y hallar su área (con * se indica el caso dudoso):

a) a=6 m, B=45º, C=105º *(Soluc: A=30º, b≅8,49 m, c≅11,59 m, S_{ABC} ≅24,60 m^2)*

b) a=10 dam, b=7 dam, C=30º *(Soluc: c≅5,27 dam, B≅41º 38', A≅108º 22')*

c) b=35,42 dm, A=49º 38', B=70º 21' *(Soluc: C=60º 1', a≅28,66 dm, c≅32,58 dm, S_{ABC} ≅439,94 dm^2)*

d) a=13 m, b=14 m, c=15 m *(Soluc: A≅53º 7' 48", B≅59º 29' 23", C≅67º 22' 48", S_{ABC} ≅84m^2)*

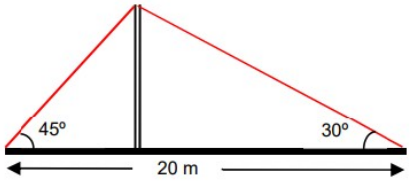
Problemas de planteamiento:

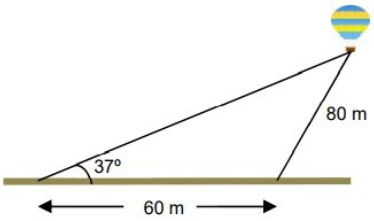
67. Un grupo decide escalar una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación, que resulta ser 30º. A continuación han avanzado 100 m hacia la base de la montaña y han vuelto a medir el ángulo de elevación, siendo ahora 45º. Calcular la altura de la montaña. *(Soluc: ≅136,60 m)*

68. Rosa y Juan se encuentran a ambos lados de la orilla de un río, en los puntos A y B respectivamente. Rosa se aleja hasta un punto C distante 100 m del punto A desde la que dirige visuales a los puntos A y B que forman un ángulo de 20º y desde A ve los puntos C y B bajo un ángulo de 120º. ¿Cuál es la anchura del río? *(Soluc: ≅53,21 m)*

69. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia AB es de 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120º. ¿Cuánto distan A y C? *(Soluc: ≅13 km 77 m)*

70. Se ha colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta, como muestra la figura. ¿Cuánto miden el cable y el mástil?
(Sol: cable=25 m; mástil≅7,32 m)





71. Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo y la longitud del cable más extenso. *(Sol: ≅71,80 m y 119.31 m. respectivamente)*

Ecuaciones trigonométricas:

57. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *(Sol: x=60º+k·360º; x=120º+k·360º)*

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Sol: x=135º+k·360º; x=225º+k·360º)*

f) $\operatorname{sen} x = 0$ *(Sol: x=k·180º)*

g) $\cos x = -1$ *(Sol: x=(2k+1)·180º)*

h) $\operatorname{cosec} x = -2$ *(Sol: x=210º+k·360º; x=330º+k·360º)*

58. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas más elaboradas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$ *(Sol: x=45º+k·360º)*

b) $\operatorname{sen} x - 2\cos 2x = -\frac{1}{2}$ *(Sol: 30º, 150º, ≅311º24'35" y ≅228º35'25")*

c) $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$ *(Sol: x=45º+k·180º)*

o) $\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=90º+k·180º; x=45º+k·180º)*

p) $\cos 2x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$ *(Sol: x=30º+k·360º; x=150º+k·360º)*

q) $4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$ *(Sol: x=k·180º; x=45º+k·90º)*

r) $4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ *(Sol: x=36º52'11,6"+k·180º; x=135º+k·180º)*

ACTIVIDAD 7. NÚMEROS COMPLEJOS

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: −8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: −2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: −46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: −4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\dfrac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{2}{17}+\dfrac{8}{17}i\right)$

h) $\dfrac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(\text{Soluc}: \dfrac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^4+i^{-13})^3$ *(Soluc: −2−2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: −1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: −1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\,i)^3$ *(Soluc: −512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(\text{Soluc}: -128+128\sqrt{3}i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(\text{Soluc}: -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\dfrac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(\text{Soluc}: -\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$

54. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ **b)** $z_1 \cdot z_3$ **c)** $(z_1)^4$ **d)** $\overline{z_2}$ $\left(\text{Sol}: a)\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}i;\ b)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i;\ c)-8+8\sqrt{3}i;\ d)-3i\right)$

55. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, calcular $z^5 \cdot \bar{z}$ *(Soluc: −64)*

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ $\left(\text{Soluc}: \sqrt[8]{2}_{11,25º};\ \sqrt[8]{2}_{101,25º};\ \sqrt[8]{2}_{191,25º};\ \sqrt[8]{2}_{281,25º}\right)$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ $\left(\text{Soluc}: \sqrt[6]{2}_{105º};\ \sqrt[6]{2}_{225º};\ \sqrt[6]{2}_{345º}\right)$

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\left(\text{Soluc}: \sqrt[4]{2}_{60º};\ \sqrt[4]{2}_{150º};\ \sqrt[4]{2}_{240º};\ \sqrt[4]{2}_{330º}\right)$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\left(\text{Soluc}: \sqrt[6]{2}_{45º};\ \sqrt[6]{2}_{165º};\ \sqrt[6]{2}_{285º}\right)$

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ $\left(\text{Soluc}: i;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\right)$

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc: $-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc: $\pm2,\ \pm2i$)*

d) $x^4+1=0$ $\left(\text{Soluc}: \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

ACTIVIDAD 8. VECTORES EN EL PLANO

Ángulo de dos vectores:

33. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos (cada apartado en diferentes ejes):

a) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(1,3)$ *(Soluc: 45º)*

b) $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ *(Soluc: 30º)*

e) $\vec{x}=(-5,12)$ y $\vec{y}=(8,-6)$ *(Sol: ≅ 149º 29´)*

f) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-9,3)$ *(Soluc: 135º)*

Problemas con parámetros:

46. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular **a** de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales *(Soluc: a=3/2)*

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60º $\left(Soluc: a=\frac{24+15\sqrt{3}}{11}\right)$

c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección *(Soluc: a=-6)*

47. Dados los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(2,m)$, hallar **m** de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales. *(Soluc: m=2)*

b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección. *(Soluc: m=-2)*

c) $\vec{b}$ sea unitario. *(Soluc: ∄ soluc.)*

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45º *(Soluc: m=0)*

SEGUNDA PRUEBA:

ACTIVIDAD 9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

31.- Determinar el punto de corte de : $r\equiv(x,y)=(-3,2)+\lambda(2,-1)\ \ \lambda\in R$, $s\equiv\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=2-2\lambda\end{cases}\ \ \lambda\in R$ Sol: (1,0)

32.- En el triángulo A(1,2), B(5,1) y C(3,4) hallar la longitud de la altura sobre BC, la longitud del lado BC, la longitud de la altura y el área del triángulo. Sol: 2x-3y+4=0; $\sqrt{13}$; $10/\sqrt{13}$; $5u^2$.

33.- Calcular el área del triángulo limitado por las rectas r≡ x-y-1=0; s≡ x+y-3=0; t≡ y-2=0

34.- Hallar "a" y "b" de forma que las rectas r≡ ax+by-1=0 y s≡ 2x-3y+4=0 sean paralelas y r pase por el punto A(1,1). Sol: a=-2 y b=3

35.- Hallar "a" para que las tres rectas se corten en un punto:

$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}$; $s\equiv 3x-y-7=0$ y $t\equiv x+ay+2a=0$ Sol: a=-9/7

36.- Determinar la recta r que pasa por el punto de corte de las rectas $s\equiv\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=5-2\lambda\end{cases}\ \lambda\in R$ y

$t\equiv\frac{x}{-3}-\frac{y-1}{2}$ y es paralela a la recta $u\equiv\frac{x}{1/2}+\frac{y}{-3}-1$. Sol: r≡ 6x-y+1=0

37.- Los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1,2), B(5,0), C y D. Se sabe que los lados AD y BC son paralelos a la recta (x,y)=(-7,2)+λ(1,1) λ∈R, y que el punto P(6,4) pertenece a la recta que pasa por C y D. Hallar estos vértices. Sol: C(8,3), D(4,5).

38.- Dadas las rectas $r\equiv 4x-y-3=0$, $s\equiv x+2y-12=0$ y $t\equiv x-y=0$ hallar:

a) Los vértices del triángulo que determinan. Sol: A(1,1), B(4,4), C(2,5).

b) La ecuación de la altura sobre el lado contenido en la recta t. Sol: x+y-7=0.

c) La longitud del lado contenido en r. Sol: $\sqrt{17}$.

d) La longitud de la altura sobre el lado contenido en s. Sol: $9/\sqrt{5}$

e) Área del triángulo. Sol: 9/2.

ACTIVIDAD 10. DOMINIOS

1.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones polinómicas y racionales:

a) $f(x)=2x+1$ b) $f(x)=x^3-x-8$ c) $f(x)=x^2+x+1$

d) $f(x)=x^9-6x^4+9$ e) $f(x)=x^5-2x+6$ f) $f(x)=(x-1)^3$

g) $f(x)=\dfrac{1}{7-3x}$ h) $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-1}$ i) $f(x)=\dfrac{7}{x^2-5}$

j) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ k) $f(x)=\dfrac{1}{x^4-1}$ l) $f(x)=\dfrac{7x+9}{x^3+8}$

2.- Halla el dominio de definición de las siguientes funciones irracionales:

a) $f(x)=6x-2\sqrt{x}+8$ l) $f(x)=\sqrt{-2x^2+5x-3}$ v) $f(x)=-4+\sqrt{x-1}$

b) $f(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{3-x}$ m) $f(x)=\sqrt{3x-x^2+4}$ w) $f(x)=\sqrt{4-2x}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ x) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}}$

3.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(-3x+2)$ j) $f(x)=\log\left(\dfrac{x+7}{x}\right)$ r) $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x-4}$

b) $f(x)=\log\sqrt{-3x}$ k) $f(x)=\dfrac{2x-9}{\log\sqrt{x+3}}$ s) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$

c) $f(x)=\ln(5-x^2)$ l) $f(x)=5^{x-2}$ y) $f(x)=\sqrt[3]{e^x-1}$

ACTIVIDAD 11. OPERACIONES CON FUNCIONES

5.- Dadas las siguientes funciones, efectúa las operaciones que se indican, indicando el dominio de la función resultante:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ $g(x)=x^2-6$ $h(x)=\dfrac{6x}{x^2-4}$ $p(x)=\sqrt{x+1}$ $j(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

$k(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ $l(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ $m(x)=x-4$ $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$ $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

a) $f+g$ d) $j+k$ g) $j-r$ j) $j-s$ m) $h\cdot k$ p) $j\cdot s$ s) k/s

b) g/p e) $g\circ m$ h) $m\circ g$ k) $f\circ m$ n) $m\circ j$ q) $p\circ r$ t) s^{-1}

c) $p\circ j$ f) $s\circ p$ i) $r\circ s$ l) m^{-1} o) j^{-1} r) r^{-1} u) g^{-1}

ACTIVIDAD 12. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES E INVERSA

8.- Sean las funciones: $f(x)=3x+2$ y $g(x)=\dfrac{x+3}{2x+1}$, calcular: **a)** $g\circ f$; **b)** $f\circ g$

Sol: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+2)=\dfrac{3x+5}{6x+5}$ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)=\dfrac{7x+11}{2x+1}$

9.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$; $g(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ y $h(x)=\dfrac{1}{x}$, calcular: **a)** $g\circ f$; **b)** $f\circ g$; **c)** $h\circ g\circ f$; **d)** $h\circ f\circ g$; **e)** f^{-1}; **f)** Probar que $f^{-1}\circ f=I$; **g)** Probar que: $f\circ f^{-1}=I$

Sol: $a)(g\circ f)(x)=\dfrac{3-2x}{2x+1};b)(f\circ g)(x)=\dfrac{2x+1}{2x-3};c)(h\circ g\circ f)(x)=\dfrac{2x+1}{3-2x};d)(h\circ f\circ g)(x)=\dfrac{2x-3}{2x+1}$

10.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{x+2}{2x+1}$ y $g(x)=\sqrt{x}$, Calcular: **a)** $g\circ f$, **b)** $f\circ g$, **c)** f^{-1}, **d)** Probar que $f^{-1}\circ f=I$

Sol: $a)(g\circ f)(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+1}};b)(f\circ g)(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}+1};c)f^{-1}(x)=\dfrac{2-x}{2x-1}$

ACTIVIDAD 13. LÍMITES Y CONTINUIDAD

27.- Calcula los límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+4x}{-5x-2x^3}$

b) $\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x+2}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+8}{2x^2-5}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{\sqrt{x^6+1}}$

e) $\lim_{x\to1}\frac{5x}{x-1}$

f) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x-1}$

g) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

h) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)$

i) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{7+x}-3}$

j) $\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt{1-x}-1}$

k) $\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-2x}$

l) $\lim_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-4x^2+4x-3}$

m) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

n) $\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+5}{x^3+x-3}$

ñ) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$

o) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$

p) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$

q) $\lim_{x\to+\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$

r) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+4x^2+x-6}$

s) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$

t) $\lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{2-\sqrt{x+4}}$

u) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2}-\frac{x^4+x+1}{x^3+x}\right)$

v) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)$

w) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{4x^2-5x+2}\right)$

Sol: a)–1/2; b)0; c)½; d)0; e)No existe; f)–2; g)1; h)0; i)24; j)-10; k)2; l)13/7; m)8; n)-7; ñ)¼; o)2; p) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; q)+∞; r)1/6; s) 1/3; t) –4; u) 0; v)3; w) 9/4.

26. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\le 2\\ 3-ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(Soluc: a=0)

27. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\text{Ln } x & \text{si } 0<x<1\\ ax^2+b & \text{si } 1\le x<\infty\end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3 *(Soluc: a=1 y b=–1)*

29. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\le 1\\ mx+n & \text{si } 1<x\le 3\\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3\end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica). *(Soluc: m=3, n=1)*

30. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x\le -2\\ ax+2 & \text{si } -2\le x\le 2\\ x^2+b & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

(Soluc: a=–1/2, b=–3)

31. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+a & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2\\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

(Soluc: a=–2, b=1)

ACTIVIDAD 14. ASÍNTOTAS

1. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 6}$, calcular:

a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

2. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{2x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$, calcular:

a) Dominio de definición y corte a los ejes.
a) Asíntotas.
b) Gráfica aproximada.

3. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, calcular:

a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

4. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 2}$, calcula

a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

5. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, calcula

a) Dominio de definición y corte a los ejes.
b) Asíntotas.
c) Gráfica aproximada.

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

ACTIVIDAD 15. DERIVADAS Y GRÁFICAS

9. Utilizando en cada caso la fórmula más apropiada de la tabla de derivadas, hallar la derivada **simplificada** de las siguientes funciones compuestas:

a) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **d)** $y = (x^2 - 3)^2$ **e)** $y = \dfrac{2}{x^3}$

f) $y = (x^2 + x + 1)^3$ **g)** $y = \sqrt[3]{2x^3 - 3}$ **h)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ **i)** $y = 3(x^2 + 1)^{10}$ **j)** $y = 2(3x^2 - 1)^4$

k) $y = \dfrac{2}{(x^2 + 1)^3}$

(*Sol:* **a)** $y' = \frac{-2}{x^3}$; **b)** $y' = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2}$; **c)** $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; **d)** $y' = 4x^3 - 12x$; **e)** $y' = \frac{-6}{x^4}$; **f)** $y' = 3(2x+1)(x^2+x+1)^2$;

g) $y' = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3 - 3)^2}}$; **h)** $y' = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$; **i)** $y' = 60x(x^2+1)^9$; **j)** $y' = 48x(3x^2-1)^3$; **k)** $y' = \frac{-12x}{(x^2 + 1)^4}$)

12. Derivar las siguientes funciones, utilizando en cada caso el procedimiento más apropiado, y **simplificar**:

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x + 1}{1 - x}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ **e)** $y = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 5}{2}$

f) $y = (3x^2 + 5)^5$ **g)** $y = \dfrac{2x}{x^2 + x + 1}$

(*Sol:* **a)** $y' = \frac{-2}{x^3}$; **b)** $y' = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$; **c)** $y' = \frac{2}{(1 - x)^2}$; **d)** $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$; **e)** $y' = 6x^3 - 2x$; **f)** $y' = 30x(3x^2 + 5)^4$

g) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$)

Ecuación de la recta tangente:

14. Hallar la ecuación de la recta tangente a las curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x)=3x^2+8$ en $x=1$ *(Sol: $6x-y+5=0$)*

b) $y=2x^5+4$ en $x=-1$ *(Sol: $10x-y+12=0$)*

c) $f(x)=x^4-1$ en $x=0$ *(Sol: $y=-1$)*

d) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2-3}$ en $x=2$ *(Sol: $y=-12x+30$)*

Intervalos de crecimiento. M y m. Representación de funciones:

18. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los M y m de las siguientes funciones. Representarlas gráficamente.

a) $f(x)=x^2$

b) $f(x)=x^4-2x^2$

c) $y=x^3-3x^2+1$

d) $f(x)=x^3-6x^2+9x-8$

e) $f(x)=x^3-4x^2+7x-6$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4+8x^3+18x^2-10$

h) $y=x^3-3x^2-9x+1$

i) $f(x)=x^4-4x^3+1$

j) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-6x+3$

k) $y=2x^3-9x^2$

l) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

m) $y=x^3-12x$

*(Soluc: **a)** $\nearrow(0,\infty)$ $\searrow(-\infty,0)$; **b)** $\nearrow(-1,0)\cup(1,\infty)$ $\searrow(-\infty,-1)\cup(0,1)$; **c)** $\nearrow(-\infty,0)\cup(2,\infty)$ $\searrow(0,2)$; **d)** $\nearrow(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ $\searrow(1,3)$; **e)** $\nearrow\forall x\in\mathbb{R}$; **f)** $\nearrow\forall x\in\mathbb{R}$; **g)** $\searrow(-\infty,0)$ $\nearrow(0,\infty)$; **h)** $\nearrow(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ $\searrow(-1,3)$; **i)** $\searrow(-\infty,3)$ $\nearrow(3,\infty)$)*

20. Ídem para:

a) $f(x)=x^3-3x$ **b)** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ **c)** $y=x^4-2x^2$ **d)** $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=x^3-3x^2$

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **g)** $y=-x^3+12x$ **h)** $f(x)=\dfrac{9}{x^2-9}$ **i)** $f(x)=\dfrac{16-8x}{x^2}$ **j)** $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Observación : puedes usar Geogebra para comprobar que lo has hecho correctamente.

MODELO DEL PRIMER PARCIAL DE PENDIENTES

1) (10p) Opera simplificando al máximo:

$$\left(2\sqrt{5}-3\right)^2-\left(2\sqrt{5}+3\right)^2$$

2) (10p) Resuelve por GAUSS el sistema:

$$\begin{cases} -x-3y+2z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ -3x+y+6z=2 \end{cases}$$

3) (10p) Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:

$$\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)}=2$$

4) (10p) Resuelve la siguiente ecuación exponencial:

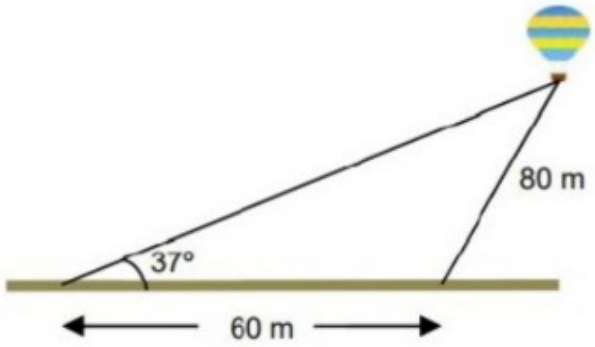
$$2^{2+x}-2^{1+x}+2^x=\frac{1}{2}$$

5) (10p) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos(2x)-3sen x+1=0$$

6) (10p) Resuelve en el plano complejo la ecuación $z^3+8=0$.

7) Un globo aerostático está sujeto al suelo mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60m. El cable más corto mide 80m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37º. Hallar la altura del globo (5p) y la longitud del cable más extenso (5p).



8) (10 p) Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(2,1)$ y $\vec{v}(1,2)$

MODELO DEL SEGUNDO PARCIAL DE PENDIENTES

1) Dados los puntos A(1,5) y B(3,-2), hallar:

a) **(5p)** La ecuación general de la recta que pasa por A y B.

b) **(5p)** La ecuación explícita de la mediatriz del segmento AB.

2) Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) **(4p)** $f(x)=\dfrac{1}{4x^2-x}$

b) **(6p)** $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

3) **(10p)** Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x+2}-1}$$

4) **(10p)** Hallar la ecuación general de la recta tangente a la curva $y=3x^2+8$ en el punto de abscisa x=1.

5) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) **(5p)** $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}$

b) **(5p)** $g(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

6) **(6p)** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función:

$$y=x^3-3x^2+1$$

Hacer una gráfica **(4p)** aproximada.